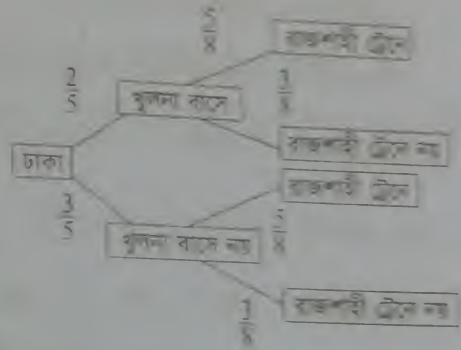
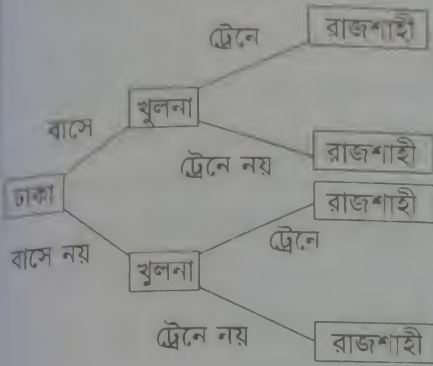


* একজন লোক ঢাকা হতে খুলনায় বাসে যাওয়ার সম্ভাবনা $\frac{2}{5}$ এবং খুলনা হতে রাজশাহী ট্রেনে যাওয়ার সম্ভাবনা $\frac{5}{8}$ । লোকটি খুলনায় বাসে এবং রাজশাহী ট্রেনে না যাওয়ার সম্ভাবনা কত? Probability tree তৈরি করে দেখান।

সমাধান:

সম্ভাবনা মাধ্যমে Probability tree টি ডান পাশে দেখানো হল-



∴ লোকটির খুলনায় বাসে এবং রাজশাহীতে ট্রেনে না যাওয়ার সম্ভাবনা- $P[\text{খুলনা বাস, রাজশাহী ট্রেনে নয়}] = \frac{2}{5} \times \frac{3}{8} = \frac{6}{40} = \frac{3}{20}$ (উত্তর)।

জ্যামিতি

ত্রিভুজ বিষয়ক উপপাদ্য

■ $\triangle ABC$ এর AB ও AC বাহুকে বর্ধিত করলে B ও C বিন্দুদ্বয় যে বহিঃস্থ কোণদ্বয় উৎপন্ন করে, তাদের সমদ্বিখণ্ডকদ্বয় O বিন্দুতে মিলিত হলে, প্রমাণ করুন যে, $\angle BOC = 90^\circ - \frac{1}{2} \angle A$.

সমাধান:

সাধারণ নির্বচন : ABC ত্রিভুজের $\angle B$ এবং $\angle C$ এর বহিঃস্থ কোণ 'O' বিন্দুতে মিলিত হলে $\angle BOC$ এর মান নির্ণয় করতে হবে।

বিশেষ নির্বচন : দেওয়া আছে, $\angle B$ ও $\angle C$ এর বহিঃস্থ কোণ 'O' বিন্দুতে মিলিত হয়েছে $\angle BOC$ কোণ মান নির্ণয় করতে হবে।

প্রমাণ : আমরা জানি, ত্রিভুজের তিন কোণের সমষ্টি 180° বা দুই সমকোণ।

∴ $\triangle ABC$ -এ

$$\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$$

$$\text{বা, } \frac{1}{2} \angle A + \frac{1}{2} \angle B + \frac{1}{2} \angle C = 90^\circ$$

[উভয় পক্ষকে $\frac{1}{2}$ দ্বারা গুণ করে]

আবার,

$\triangle BOC$ -এ

$$\angle BOC + \angle OBC + \angle OCB = 180^\circ$$

$$\text{বা, } \angle BOC + \frac{1}{2} \angle DBC + \frac{1}{2} \angle ECB = 180^\circ$$

$$\text{বা, } \angle BOC + \frac{1}{2} (180^\circ - \angle B) + \frac{1}{2} (180^\circ - \angle C) = 180^\circ$$

$$\text{বা, } \angle BOC + 90^\circ - \frac{1}{2} \angle B + 90^\circ - \frac{1}{2} \angle C = 180^\circ$$

$$\text{বা, } \angle BOC = 180^\circ - 90^\circ + \frac{1}{2} \angle B - 90^\circ + \frac{1}{2} \angle C$$

$$\text{বা, } \angle BOC = 180^\circ - 180^\circ + \frac{1}{2} \angle B + \frac{1}{2} \angle C$$

$$\text{বা, } \angle BOC = \frac{1}{2} \angle B + \frac{1}{2} \angle C$$

$$\text{বা, } \angle BOC = \frac{1}{2} \angle B + \frac{1}{2} \angle C + \frac{1}{2} \angle A - \frac{1}{2} \angle A$$

$$\text{বা, } \angle BOC = 90^\circ - \frac{1}{2} \angle A \quad [\text{যেহেতু } \frac{1}{2} \angle A + \frac{1}{2} \angle B + \frac{1}{2} \angle C = 90^\circ]$$

$$\therefore \angle BOC = 90^\circ - \frac{1}{2} \angle A \quad (\text{প্রমাণিত})$$

■ প্রমাণ করুন যে, ত্রিভুজের যে কোনো দুই বাহুর মধ্যবিন্দুর সংযোজক রেখাংশ তৃতীয় বাহুর সমান্তরাল এবং অর্ধেক।

সমাধান:

সাধারণ নির্বচন : প্রমাণ করতে হবে যে, ত্রিভুজের যে কোন দুই বাহুর মধ্যবিন্দুর সংযোজক রেখাংশ তৃতীয় বাহুর সমান্তরাল ও দৈর্ঘ্যে তার অর্ধেক।

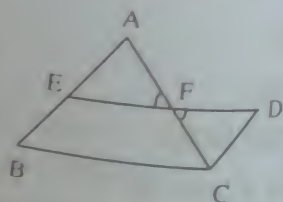
বিশেষ নির্বচন : মনে করি, $\triangle ABC$ -এর AB এবং AC বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে E এবং F । E, F যোগ করি।

প্রমাণ করতে হবে যে, $EF \parallel BC$ এবং $EF = \frac{1}{2} BC$ ।

অঙ্কন : EF -কে D পর্যন্ত এমনভাবে বর্ধিত করি যেন, $FD = EF$ হয়। D, C যোগ করি।

প্রমাণ : $\triangle AEF$ এবং $\triangle CDF$ -এ

$AF = CF$ [∵ F, AC এর মধ্যবিন্দু]



$EF = FD$ [অঙ্কনানুসারে]

এক অন্তর্ভুক্ত $\angle AFE =$ অন্তর্ভুক্ত $\angle CFD$ [বিপরীত কোণ বলে]

$\therefore \triangle AFE \cong \triangle CDF$ \therefore উভয় ত্রিভুজের দুই বাহু এবং তাদের অন্তর্ভুক্ত কোণ সমান।

সুতরাং, $AE = DC$ এবং $\angle EAF = \angle DCF$

কিন্তু, $\angle EAF$ এবং $\angle DCF$ একান্তর কোণ এবং এদের ছেদক AC

$\therefore AE \parallel DC$

অর্থাৎ, $BE \parallel CD$ \therefore AE এবং BE একই সরলরেখা।

সুতরাং, $AE = CD$

বা, $BE = CD$ \therefore E , AB এর মধ্যবিন্দু।

কাজেই চতুর্ভুজ $BCDE$ -এর BE ও CD বিপরীত বাহুদ্বয় পরস্পর সমান ও সমান্তরাল।

আমরা জানি, চতুর্ভুজের দুটি বিপরীত বাহু সমান ও সমান্তরাল হলে, তার অপর বাহু দুইটিও সমান ও সমান্তরাল হয়।

$\therefore ED \parallel BC$ অর্থাৎ $EF \parallel BC$

এবং $ED = BC$

বা, $EF + FD = BC$ $\therefore ED = EF + FD$

বা, $EF + EF = BC$ \therefore অঙ্কনানুসারে, $EF = FD$

বা, $2EF = BC$

$\therefore EF = \frac{1}{2} BC$ সুতরাং, $EF \parallel BC$ এবং $EF = \frac{1}{2} BC$ (প্রমাণিত)

■ ত্রিভুজের একটি বাহু অপর কোন বাহু অপেক্ষা বৃহত্তর হলে, প্রমাণ কর যে, বৃহত্তর বাহুর বিপরীত কোণ ক্ষুদ্রতর বাহুর বিপরীত কোণ অপেক্ষা বৃহত্তর হবে।

সমাধান:

সাধারণ নির্বচন : ত্রিভুজের একটি বাহু অপর কোন বাহু অপেক্ষা বৃহত্তর হলে, বৃহত্তর বাহুর বিপরীত কোণ ক্ষুদ্রতর বাহুর বিপরীত কোণ অপেক্ষা বৃহত্তর হবে।

বিশেষ নির্বচন : $\triangle ABC$ -তে AC বাহু $>$ AB বাহু। প্রমাণ করতে হবে যে, $\angle ABC > \angle ACB$

অঙ্কন : $\triangle ABC$ থেকে, $AB = AD$ নিই। B , D যোগ করি।

প্রমাণ : $\triangle ABD$ তে, $AB = AD$.

$\therefore \angle ADB = \angle ABD$

কিন্তু, $\triangle BCD$ তে,

বহিঃস্থ $\angle ADB > \angle DCB$

অর্থাৎ, $\angle ADB > \angle ACB$

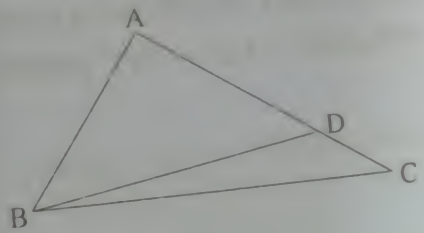
কিন্তু, $\angle ADB = \angle ABD$ বলে,

$\angle ABD > \angle ACB$

আবার, $\angle ABC > \angle ABD$

কোননা, $\angle ABD$, $\angle ABC$ এর অংশ।

সুতরাং, $\angle ABC > \angle ACB$ (প্রমাণিত)।



- যদি কোন ত্রিভুজ ABC-এর $AB^2 = AC^2 + BC^2$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $\angle C =$ সমকোণ।

সমাধান:

বিশেষ নির্বচন : মনে করি, $\triangle ABC$ এর $AB^2 = AC^2 + BC^2$

+ BC^2 প্রমাণ করতে হবে যে, $\angle C =$ এক সমকোণ।

অংকন : এমন একটি ত্রিভুজ DEF আঁকি যেন, $\angle F =$

এক সমকোণ, $EF = BC$ এবং $DF = AC$ হয়।

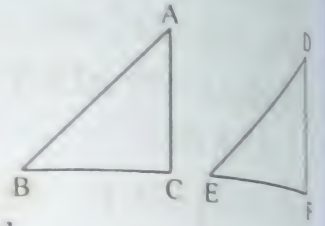
প্রমাণ : $DE^2 = EF^2 + DF^2$ [কারণ $\angle F =$ এক সমকোণ]
 $= BC^2 + AC^2 = AB^2 \therefore DE = AB$

এখন, $\triangle ABC$ ও $\triangle DEF$ -এ,

$BC = EF$, $AC = DF$ এবং $AB = DE$

$\therefore \triangle ABC \cong \triangle DEF$

$\therefore \angle C = \angle F =$ এক সমকোণ (প্রমাণিত)।



- ABC সমবাহু ত্রিভুজের AD একটি মধ্যমা। প্রমাণ করুন যে, $AB^2 = AD^2 + BD^2$ ।

সমাধান:

দেওয়া আছে, ABC সমবাহু ত্রিভুজ এবং AD একটি মধ্যমা।

প্রমাণ করতে হবে যে, $AB^2 = AD^2 + BD^2$ ।

প্রমাণ : $\triangle ABD$ ও $\triangle ADC$ তে,

$AB = AC$ (সমবাহু বলে)

$BD = CD$ (AD মধ্যমা বলে)

এবং AD বাহু সাধারণ

অতএব, $\triangle ABD \cong \triangle ADC$

ফলে, $\angle BAD = \angle CAD$

কিন্তু $\triangle ABC$ সমবাহু বলে, $\angle BAC = 60^\circ$

কিন্তু, $\angle BAC = \angle BAD + \angle CAD$

ফলে, $\angle BAD = 30^\circ = \angle CAD$

এখন, $\triangle ABD$ তে, $\angle BAD = 30^\circ$, $\angle ABD = 60^\circ \therefore \angle ADB = 180^\circ - (30^\circ + 60^\circ)$
 $= 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$

ফলে, $\triangle ABD$ সমকোণী যার AB অতিভুজ এবং AD ও BD যথাক্রমে ভূমি ও লম্ব

ফলে, $AB^2 = AD^2 + BD^2$ (প্রমাণিত)



- $\triangle ABC$ একটি ত্রিভুজ। BC -এর সমান্তরাল রেখা DE অপর দুই বাহুর বর্ধিতাংশদ্বয়কে যথাক্রমে D ও E বিন্দুতে ছেদ করে। $AB = 4.5$, $AC = 3.5$ এবং $AD = 7.2$ হলে, AE -এর দৈর্ঘ্য নির্ণয় করুন।

সমাধান:

$\triangle ABC$ এর BC বাহুর সমান্তরাল DE অর্থাৎ, $BC \parallel DE$

$\therefore BC \parallel DE$ হওয়ায়, $BD = CE$

এখন, দেওয়া আছে,

$AB = 4.5$, $AC = 3.5$ এবং $AD = 7.2$

$$\begin{aligned} \therefore BD &= AD - AB \\ &= 7.2 - 4.5 \\ &= 2.7 \end{aligned}$$

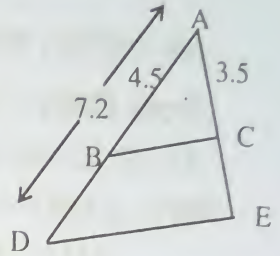
আবার, $BC \parallel DE$ বলে, $\frac{AB}{BD} = \frac{AC}{CE}$

বা, $AB \times CE = BD \times AC$

$$CE = \frac{BD \times AC}{AB} = \frac{2.7 \times 3.5}{4.5} = 2.1$$

আবার, $AE = AC + CE = 3.5 + 2.1 = 5.6$

\therefore নির্ণেয় দৈর্ঘ্য 5.6 Ans.

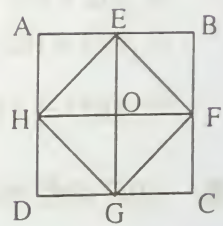


- প্রমাণ করুন যে, কোন চতুর্ভুজের বাহুগুলোর মধ্যবিন্দু চারটি পর্যায়ক্রমে সংযুক্ত করলে একটি সামান্তরিক উৎপন্ন হয়।

সমাধান:

সাধারণ নির্বচন: কোন চতুর্ভুজের চার বাহুর মধ্যবিন্দুগুলো পর্যায়ক্রমে যোগ করলে যে চতুর্ভুজ উৎপন্ন হয়, তা একটি সামান্তরিক।

বিশেষ নির্বচন : মনে করি, $ABCD$ চতুর্ভুজের AB , BC , CD , AD এর উপর যথাক্রমে E , F , G ও H মধ্যবিন্দু। প্রমাণ করতে হবে যে, $EFGH$ একটি সামান্তরিক।



অংকন : E ও G এবং H ও F যোগ করি। তাহলে EG ও HF পরস্পর O বিন্দুতে ছেদ করে।

প্রমাণ : কোনো চতুর্ভুজের বিপরীত বাহুগুলোর মধ্যবিন্দুসমূহের যোগফলে উৎপন্ন রেখাদ্বয় পরস্পরকে সমদ্বিখন্ডিত করে।

অতএব, $EO = OG$ এবং $OH = OF$

এখন, $\triangle HOG$ এবং $\triangle EOF$ এ

$OG = OE$, $OH = OF$ এবং অন্তর্ভুক্ত $\angle HOG =$ অন্তর্ভুক্ত $\angle EOF$ [বিপ্রতীপ কোণ]

$\therefore \triangle HOG \cong \triangle EOF$

অর্থাৎ $\angle EGH = \angle GEF$ [একান্তর কোণ] এবং EG এদের ছেদক

$\therefore HG$ সমান্তরাল EF

অনুরূপভাবে দেখানো যায়, HE সমান্তরাল GF

$\therefore EFGH$ চতুর্ভুজে $EH \parallel FG$ এবং $EF \parallel HG$

$\therefore EFGH$ একটি সামান্তরিক (প্রমাণিত)

■ ABC ত্রিভুজের $\angle B = 90^\circ$ । D অতিভূজ AC-এর মধ্যবিন্দু। প্রমাণ করুন যে, $BD = \frac{1}{2} AC$.

সমাধান:

সাধারণ নির্বচন : ABC ত্রিভুজের $\angle B = 90^\circ$ । D অতিভূজ AC-এর মধ্যবিন্দু। প্রমাণ করতে হবে যে, $BD = \frac{1}{2} AC$.

বিশেষ নির্বচন : BD কে E পর্যন্ত বর্ধিত করি যেন, $BD = DE$ হয়। E, C এবং A, E যোগ করি।

প্রমাণ : $\triangle ABD$ ও $\triangle DCE$ তে,

$$AD = CD \text{ (D, AC এর মধ্যবিন্দু)}$$

$$BD = DE \text{ (অঙ্কন)}$$

এবং অন্তর্ভুক্ত $\angle ADB = \angle CDE$ (বিপ্রতীপ কোণ)

$$\therefore \triangle ABD \cong \triangle DCE$$

আবার, $\triangle ADE$ ও $\triangle BDC$ তে,

$$AD = CD \text{ (D, AC এর মধ্যবিন্দু)}$$

$$BD = DE \text{ (অঙ্কন)}$$

এবং অন্তর্ভুক্ত $\angle ADE = \angle BDC$ (বিপ্রতীপ কোণ)

$$\therefore \triangle ADE \cong \triangle BDC$$

ফলে, $AB = CE$ এবং $AE = BC$ তথা $AB \parallel CE$ ও $AE \parallel BC$

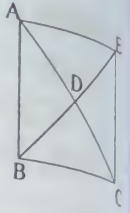
আবার, $\angle ABC = 90^\circ$. \therefore ABCE একটি আয়ক্ষেত্র

ফলে $BE = AC$

$$\text{বা, } BD + DE = AC$$

$$\text{বা, } BD + BD = AC$$

$$\text{বা, } 2BD = AC \therefore BD = \frac{1}{2} AC \text{ (প্রমাণিত)}$$



■ ABC একটি সমবাহু ত্রিভুজ এবং AD, BC এর উপর লম্ব। দেখান যে, $4AD^2 = 3AB^2$.

সমাধান:

সাধারণ নির্বচন : ABC একটি সমবাহু ত্রিভুজ এবং AD, BC এর উপর লম্ব। দেখাতে হবে যে, $4AD^2 = 3AB^2$.

বিশেষ নির্বচন : মনে করি, $\triangle ABC$ সমবাহু। অর্থাৎ $AB = BC = CA$ । AD, BC এর উপর লম্ব। দেখাতে হবে যে, $4AD^2 = 3AB^2$.

প্রমাণ : $AD \perp BC$ (দেওয়া আছে)

$$\therefore \angle ADB = \angle ADC = 90^\circ$$

এখন, সমকোণী $\triangle ABD$ এবং সমকোণী $\triangle ACD$ -এ

অতিভূজ $AB =$ অতিভূজ AC

[\because ABC সমবাহু ত্রিভুজ]

এবং AD উভয় ত্রিভুজের সাধারণ বাহু।

$$\therefore \triangle ABD \cong \triangle ACD$$

সুতরাং, $BD = CD$ [\because সমকোণী ত্রিভুজের অতিভূজ এবং অপর একবাহু সমান]



$$\therefore BC = 2BD$$

আবার, সমকোণী $\triangle ABD$ -এ $\angle ADB = 90^\circ$

এবং অতিভুজ = AB

\therefore পীথাগোরাসের উপপাদ্য অনুসারে, $AB^2 = AD^2 + BD^2$

$$\text{বা, } AD^2 = AB^2 - BD^2$$

$$\text{বা, } 4AD^2 = 4AB^2 - 4BD^2 \text{ [উভয়পক্ষকে 4 দ্বারা গুণ করে]}$$

$$\text{বা, } 4AD^2 = 4AB^2 - (2BD)^2$$

$$\text{বা, } 4AD^2 = 4AB^2 - BC^2 \text{ } [\because BC = 2BD]$$

$$\text{বা, } 4AD^2 = 4AB^2 - AB^2 \text{ } [\because AB = BC = CA]$$

$$\therefore 4AD^2 = 3AB^2 \text{ (প্রমাণিত)}$$

■ ABC সমকোণী ত্রিভুজ $\angle A = 90^\circ$. BE ও CF মধ্যমা। প্রমাণ করুন যে, $4(BE^2 + CF^2) = 5BC^2$.

সমাধান:

সাধারণ নির্বচন : প্রমাণ করতে হবে যে, ABC সমকোণী ত্রিভুজে $\angle A = 90^\circ$ । BE ও CE মধ্যমা। প্রমাণ করতে হবে যে, $4(BE^2 + CF^2) = 5BC^2$.

বিশেষ নির্বচন : মনেকরি, ABC সমকোণী ত্রিভুজে $\angle A = 90^\circ$ । BE , AC এর উপর এবং CF , AB এর উপর মধ্যমা।

প্রমাণ করতে হবে যে, $4(BE^2 + CF^2) = 5BC^2$.

প্রমাণ : ABE সমকোণী ত্রিভুজে $BE^2 = AB^2 + AE^2$

..... (i)

এবং ACF সমকোণী ত্রিভুজে, $CF^2 = AC^2 + AF^2$

..... (ii)

$$\text{সুতরাং, } BE^2 + CF^2 = AB^2 + AE^2 + AC^2 + AF^2 \text{ ----- (iii)}$$

কিন্তু ABC সমকোণী ত্রিভুজে $AB^2 + AC^2 = BC^2$.

আবার, $AE = \frac{1}{2} AC$ এবং $AF = \frac{1}{2} AB$

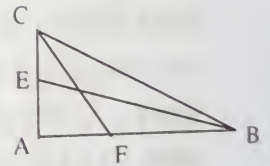
$$\text{বা, } AE^2 = \frac{AC^2}{4} \text{ এবং } AF^2 = \frac{AB^2}{4}$$

$$\text{সমীকরণ (iii) হতে পাই, } \therefore BE^2 + CF^2 = BC^2 + \frac{AC^2}{4} + \frac{AB^2}{4}$$

$$\text{বা, } 4(BE^2 + CF^2) = 4BC^2 + AC^2 + AB^2$$

$$\text{বা, } 4(BE^2 + CF^2) = 4BC^2 + BC^2$$

$$\text{বা, } 4(BE^2 + CF^2) = 5BC^2 \text{ (প্রমাণিত)।}$$



বিকল্প: সাধারণ নির্বচন : $\triangle ABC$ সমকোণী ত্রিভুজে $\angle A =$ এক সমকোণ। BE ও CF মধ্যমা
প্রমাণ করতে হবে যে, $4(BE^2 + CF^2) = 5BC^2$ ।

বিশেষ নির্বচন : মনেকরি, BC সমকোণী ত্রিভুজে $\angle A =$ এক সমকোণ। AC এর
বাহুর উপর মধ্যমা যথাক্রমে BE এবং CF ।

প্রমাণ করতে হবে যে, $4(BE^2 + CF^2) = 5BC^2$ ।

প্রমাণ : সমকোণী $\triangle ABE$ -এ $BE^2 = AB^2 + AE^2$ এবং সমকোণী
 $\triangle ACF$ -এ $CF^2 = AC^2 + AF^2$ ।

$$\begin{aligned}\therefore 4(BE^2 + CF^2) &= 4(AB^2 + AE^2 + AC^2 + AF^2) \\ &= 4(AB^2 + AC^2) + 4AE^2 + 4AF^2 \\ &= 4BC^2 + (2AE)^2 + (2AF)^2 \\ &= 4BC^2 + AC^2 + AB^2 \\ &= 4BC^2 + BC^2 \\ &= 5BC^2\end{aligned}$$

$$\therefore 4(BE^2 + CF^2) = 5BC^2 \text{ (প্রমাণিত)}$$



■ $\triangle ABC$ -এর AD একটি মধ্যমা। দেখান যে, $AB^2 + AC^2 = 2(BD^2 + AD^2)$ ।

সমাধান:

সাধারণ নির্বচন : $\triangle ABC$ এর AD একটি মধ্যমা।

প্রমাণ করতে হবে যে, $AB^2 + AC^2 = 2(BD^2 + AD^2)$ ।

বিশেষ নির্বচন : দেওয়া আছে, $\triangle ABC$ এর একটি মধ্যমা AD ।

প্রমাণ করতে হবে যে, $AB^2 + AC^2 = 2(BD^2 + AD^2)$ ।

অঙ্কন : A বিন্দু থেকে BC বাহুর উপর AE লম্ব টানি।

প্রমাণ : $\triangle ADE$ -এ

$$AD^2 = AE^2 + DE^2$$

$$\text{বা, } AD^2 - DE^2 = AE^2 \dots\dots\dots (i)$$

এবং $\triangle ABE$ -এ

$$AB^2 = AE^2 + BE^2$$

$$\text{বা, } AB^2 = AD^2 - DE^2 + (BD - DE)^2 \quad [BE = BD - DE]$$

$$\text{বা, } AB^2 = AD^2 - DE^2 + BD^2 - 2BD \cdot DE + DE^2$$

$$\text{বা, } AB^2 = AD^2 + BD^2 - 2BD \cdot DE \dots\dots\dots (ii)$$

আবার, $\triangle ACE$ -এ

$$AC^2 = AE^2 + CE^2$$

$$\text{বা, } AC^2 = AD^2 - DE^2 + (CD + DE)^2 \quad [CE = CD + DE]$$

$$\text{বা, } AC^2 = AD^2 - DE^2 + CD^2 + 2CD \cdot DE + DE^2$$

$$\text{বা, } AC^2 = AD^2 + CD^2 + 2CD \cdot DE$$

$$\text{বা, } AC^2 = AD^2 + BD^2 + 2BD \cdot DE \dots\dots\dots (iii) \quad [CD = BD]$$

(ii) নং ও (iii) নং সমীকরণ যোগ করে পাই—

$$AB^2 + AC^2 = AD^2 + BD^2 - 2BD \cdot DE + AD^2 + BD^2 + 2BD \cdot DE$$

$$\text{বা, } AB^2 + AC^2 = 2(BD^2 + AD^2) \text{ (প্রমাণিত)}$$



পীথাগোরাসের উপপাদ্যের প্রয়োগ

■ ABC একটি সমদ্বিবাহু সমকোণী ত্রিভুজ। BC অতিভুজ এবং P, BC-এর উপর যে কোন বিন্দু। প্রমাণ করুন যে, $PB^2 + PC^2 = 2PA^2$ ।

সাধারণ নির্বচন : প্রমাণ করতে হবে যে, ABC একটি সমদ্বিবাহু সমকোণী ত্রিভুজ। BC অতিভুজ এবং P, BC-এর উপর যে কোন বিন্দু। প্রমাণ করুন যে, $PB^2 + PC^2 = 2PA^2$ ।

বিশেষ নির্বচন : মনেকরি, ABC একটি সমদ্বিবাহু সমকোণী ত্রিভুজ। এর $AB = AC$ এবং BC অতিভুজ।

P, BC-এর উপর যে কোন বিন্দু। P, A যোগ করি।

প্রমাণ করতে হবে যে, $PB^2 + PC^2 = 2PA^2$ ।

অঙ্কন : P হতে AB-এর উপর PE এবং AC-এর উপর PD লম্ব টানি।

প্রমাণ : $\triangle ABC$ -এর $\angle A = 90^\circ$ এবং $AB = AC$ হওয়ায় $\angle B = \angle C = 45^\circ$ ।

এখন, $\triangle PDC$ -এর $\angle D = 90^\circ$ [$\because PD \perp AC$]

সুতরাং, $\angle DPC = \angle DCP = 45^\circ$

$\therefore PD = CD$

একই কারণে, PBE সমকোণী ত্রিভুজে $PE = BE$

PDC সমকোণী ত্রিভুজে PC অতিভুজ হওয়ায়

$$PC^2 = PD^2 + CD^2$$

$$= PD^2 + PD^2 \quad [\because PD = CD]$$

$$= 2PD^2$$

আবার, PBE সমকোণী ত্রিভুজে PB অতিভুজ হওয়ায়

$$PB^2 = BE^2 + PE^2$$

$$= PE^2 + PE^2 \quad [\because BE = PE]$$

$$= 2PE^2$$

$$\therefore PB^2 + PC^2 = 2PD^2 + 2PE^2$$

$$= 2(PD^2 + PE^2)$$

এখন, $\angle E = \angle A = \angle D =$ এক সমকোণ হওয়ায় ADPE একটি আয়তক্ষেত্র।

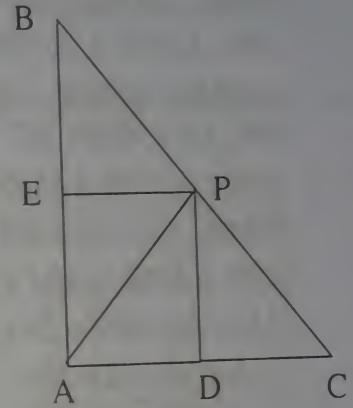
$$\therefore PE = AD$$

$$\therefore PB^2 + PC^2 = 2(PD^2 + AD^2)$$

ADP সমকোণী ত্রিভুজে PA অতিভুজ হওয়ায়

$$PA^2 = AD^2 + PD^2$$

অতএব, $PB^2 + PC^2 = 2PA^2$ (প্রমাণিত)।



চতুর্ভুজ বিষয়ক উপপাদ্য

■ প্রমাণ কর যে, রম্বসের কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমকোণে সমদ্বিখলিত করে।

সাধারণ নির্বচন : প্রমাণ করতে হবে যে, রম্বসের কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমকোণে সমদ্বিখলিত করে।

বিশেষ নির্বচন : মনে করি, ABCD রম্বসের AC এবং BD কর্ণদ্বয় পরস্পরকে O বিন্দুতে ছেদ করেছে। প্রমাণ করতে হবে যে,

i. $AO = CO$ এবং $BO = DO$

ii. $\angle AOB = \angle AOD = \angle BOC = \angle COD =$ এক সমকোণ।

প্রমাণ : AB ও DC বাহুদ্বয় সমান্তরাল এবং AC ও BD তাদের দুইটি ছেদক।

অতএব, $\angle BAC = \angle ACD$ [একান্তর কোণ বলে]

এখন, $\triangle AOB$ ও $\triangle COD$ -এ

$\angle OAB = \angle OCD$, $\angle OBA = \angle ODC$

এবং $AB =$ অনুরূপ DC

সুতরাং, $\triangle AOB \cong \triangle COD$

অতএব, $AO = CO$ এবং $BO = DO$

এখন, $\triangle AOB$ ও $\triangle AOD$ -এ

$AB = AD$, $BO = DO$ এবং AO সাধারণ বাহু

$\therefore \triangle AOB \cong \triangle AOD$

$\therefore \angle AOB = \angle AOD$

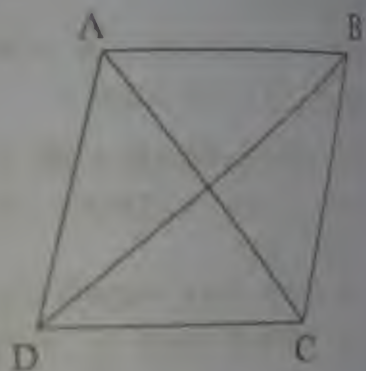
আবার, $\angle AOB + \angle AOD =$ দুই সমকোণ [$BD = 180^\circ$]

অতএব, $\angle AOB = \angle AOD =$ এক সমকোণ

আবার, $\angle COD =$ বিপরীত $\angle AOB =$ এক সমকোণ

এবং $\angle BOC =$ বিপরীত $\angle AOD =$ এক সমকোণ

অতএব, $\angle AOB = \angle AOD = \angle BOC = \angle COD =$ এক সমকোণ (প্রমাণিত)



■ প্রমাণ করুন যে, সামান্তরিকের কর্ণদ্বয় সামান্তরিক কেন্দ্রটিকে চারটি সমান ত্রিভুজ ক্ষেত্রে বিভক্ত করে।

সাধারণ নির্বচন : প্রমাণ করতে হবে যে,

সামান্তরিকের কর্ণদ্বয় সামান্তরিক কেন্দ্রটিকে

চারটি সমান ত্রিভুজ ক্ষেত্রে বিভক্ত করে।

বিশেষ নির্বচন : ABCD একটি সামান্তরিক

AC ও BD কর্ণদ্বয় পরস্পরকে E বিন্দুতে

ছেদ করেছে। প্রমাণ করতে হবে যে, \triangle -ক্ষেত্র

$AEB = \triangle$ -ক্ষেত্র $BEC = \triangle$ -ক্ষেত্র $CED =$

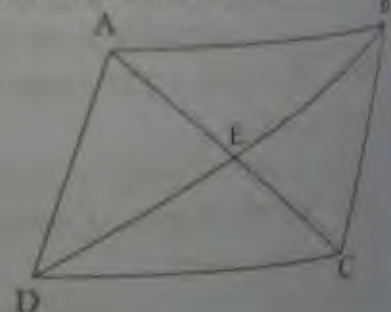
\triangle -ক্ষেত্র AED .

প্রমাণ : ABCD সামান্তরিকে AC ও BD কর্ণ পরস্পরকে E বিন্দুতে ছেদ করেছে। $\triangle AEB$

এ ED মধ্যমা

$\therefore \triangle$ -ক্ষেত্র $AED = \triangle$ -ক্ষেত্র CED

আবার, $\triangle ABCD$ -এ CE মধ্যমা



∴ Δ -ক্ষেত্র CED = Δ -ক্ষেত্র BEC

আবার, ΔABC -এ BE মধ্যমা

∴ Δ -ক্ষেত্র BEC = Δ -ক্ষেত্র AEB

আবার, ΔABD -এ AE মধ্যমা

∴ Δ -ক্ষেত্র AEB = Δ -ক্ষেত্র BEC = Δ -ক্ষেত্র CED = Δ -ক্ষেত্র AED (প্রমাণিত)

ABCD আয়তক্ষেত্রের অভ্যন্তরে O যে কোন বিন্দু। প্রমাণ করুন যে, $OA^2 + OC^2 = OB^2 + OD^2$.

সমাধান:

সাধারণ নির্বচন : ABCD আয়তক্ষেত্রের অভ্যন্তরে 'O' একটি বিন্দু। প্রমাণ করতে হবে যে, $OA^2 + OC^2 = OB^2 + OD^2$.

বিশেষ নির্বচন : মনে করি, ABCD আয়তক্ষেত্রের অভ্যন্তরে 'O' একটি বিন্দু। প্রমাণ করতে হবে যে, $OA^2 + OC^2 = OB^2 + OD^2$.

অংকন : AO, BO, CO, DO যোগ করি এবং AB এর সমান্তরাল করে 'O' বিন্দু দিয়ে EF লম্ব টানি।

∴ $AE = BF$ এবং $DE = CF$

∴ ΔAOE থেকে পাই $OA^2 = AE^2 + OE^2$

ΔDOE " " $OD^2 = DE^2 + OE^2$

ΔBOF " " $OB^2 = BF^2 + OF^2$

ΔCOF " " $OC^2 = CF^2 + OF^2$

প্রশ্নমতে,

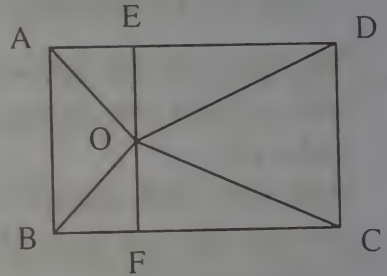
$$OA^2 + OC^2 = AE^2 + OE^2 + CF^2 + OF^2$$

$$= BF^2 + OE^2 + DE^2 + OF^2$$

$$= BF^2 + OF^2 + DE^2 + OE^2$$

$$= OB^2 + OD^2$$

∴ $OA^2 + OC^2 = OB^2 + OD^2$ (প্রমাণিত)



বৃত্ত বিষয়ক উপপাদ্য

■ প্রমাণ করুন বৃত্তের ব্যাসই বৃহত্তম জ্যা।

সাধারণ নির্বচন : প্রমাণ করতে হবে যে, বৃত্তের ব্যাসই বৃহত্তম জ্যা।

বিশেষ নির্বচন : মনে করি, O কেন্দ্রবিশিষ্ট ABEF একটি বৃত্ত। AB তার ব্যাস এবং EF ব্যাস ভিন্ন যে কোন একটি জ্যা।

প্রমাণ করতে হবে যে, $AB > EF$.

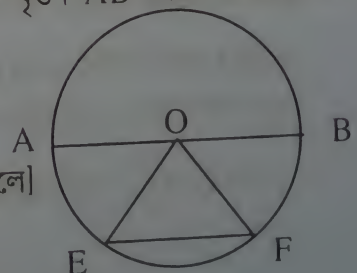
অংকন : O, E এবং O, F যোগ করি।

প্রমাণ : $OA = OB = OE = OF$ [একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ বলে]

এখন, ΔOEF -এ $OE + OF > EF$

বা, $OA + OB > EF$

∴ $AB > EF$ [$\because AB = OA + OB$] (প্রমাণিত)



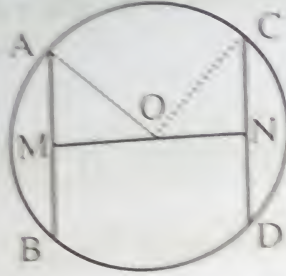
■ প্রমাণ করুন যে, বৃত্তের সমান সমান জ্যা কেন্দ্র হতে সমদূরবর্তী।

সাধারণ নির্বচন : প্রমাণ করতে হবে যে, বৃত্তের সমান সমান জ্যা কেন্দ্র হতে সমদূরবর্তী।

বিশেষ নির্বচন : মনে করি, $ABDC$ একটি বৃত্ত। 'O' এর কেন্দ্র এবং AB ও CD দুটি জ্যা।

প্রমাণ করতে হবে যে, কেন্দ্র O হতে AB এবং CD জ্যায় সমদূরবর্তী।

অঙ্কন : 'O' হতে AB ও CD জ্যা দ্বয়ের উপর OM এবং ON লম্ব অঁকি।



প্রমাণ : যেহেতু $OM \perp AB$, সেহেতু OM রেখা AB জ্যাকে সমদ্বিখন্ডিত করেছে।

$$\therefore AM = \frac{1}{2} AB \text{ অনুরূপভাবে, } CN = \frac{1}{2} CD$$

কিন্তু $AB = CD$ এবং $AM = CN$

এখন, $\triangle AMO$ এবং $\triangle CON$ সমকোণী ত্রিভুজদ্বয়ের অতিভুজ $OA =$ অতিভুজ OC ও $AM = CN$ ।

আমরা জানি, দুইটি সমকোণী ত্রিভুজদ্বয়ের অতিভুজদ্বয় এবং একটির এক বাহু অন্যটির বাহু এক বাহুর সমান হলে ত্রিভুজ দুটি সর্বসম হবে।

$$\therefore \triangle AMO \cong \triangle CON$$

$$\therefore OM = ON \text{ (প্রমাণিত)}$$

■ প্রমাণ করুন অর্ধবৃত্তস্থ কোণ এক সমকোণ।

সাধারণ নির্বচন : প্রমাণ করতে হবে যে, অর্ধবৃত্তস্থ কোণ এক সমকোণ।

বিশেষ নির্বচন : মনে করি, O কেন্দ্র বিশিষ্ট $ACBD$ বৃত্তে

AB একটি ব্যাস এবং $\angle ACB$ একটি অর্ধবৃত্তস্থ কোণ।

প্রমাণ করতে হবে যে, $\angle ACB =$ এক সমকোণ।

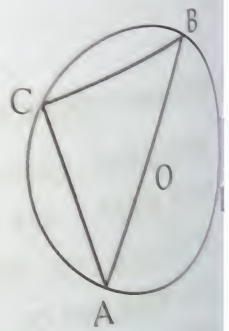
অঙ্কন : AB এর যে পাশে C বিন্দু অবস্থিত, তার বিপরীত পাশে বৃত্তের উপর একটি বিন্দু D নিই।

$$\text{প্রমাণ : } \angle ADB \text{ চাপের উপর দন্ডায়মান বৃত্তস্থ } \angle ACB = \frac{1}{2}$$

(কেন্দ্রস্থ সরল কোণ $\angle AOB$)

কিন্তু সরলকোণ $\angle AOB =$ দুই সমকোণ

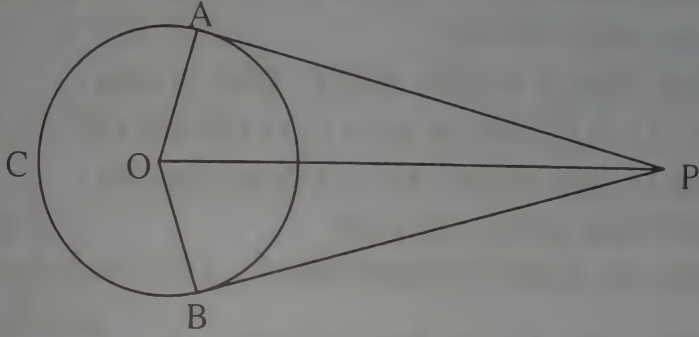
$$\therefore \angle ACB = \frac{1}{2} \times \text{দুই সমকোণ} = \text{এক সমকোণ (প্রমাণিত)}$$



প্রমাণ করুন যে, বৃত্তের বহিঃস্থ কোন বিন্দু হতে একটি বৃত্তে দুটি স্পর্শক অংকন করলে এগুলি পরস্পর সমান হবে।

সাধারণ নির্বচন : প্রমাণ করতে হবে যে, বৃত্তের বহিঃস্থ কোন বিন্দু হতে একটি বৃত্তে দুইটি স্পর্শক অংকন করলে এগুলি পরস্পর সমান হবে।

বিশেষ নির্বচন : মনে করি, O কেন্দ্রবিশিষ্ট ABC বৃত্তের বহিঃস্থ একটি বিন্দু P এবং PA ও PB বৃত্তটির দুটি স্পর্শক। প্রমাণ করতে হবে যে, $PA = PB$ ।



অংকন : O, A ও O, B যোগ করি।

প্রমাণ : যেহেতু বৃত্তের পরিধির যে কোন বিন্দুতে অংকিত স্পর্শক, স্পর্শক বিন্দুগামী ব্যাসার্ধের উপর লম্ব সেহেতু $\angle PAO$ এবং $\angle PBO$ উভয়ই এক সমকোণ।

ΔPAO ও ΔPBO সমকোণী ত্রিভুজদ্বয়ের PO এদের সাধারণ বাহু।

$\therefore OA = OB$ [একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ বলে]

আমরা জানি, সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ ও সংলগ্ন একটি বাহু যথাক্রমে অপর একটি ত্রিভুজের অতিভুজ ও অপর বাহুর সমান হলে ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম।

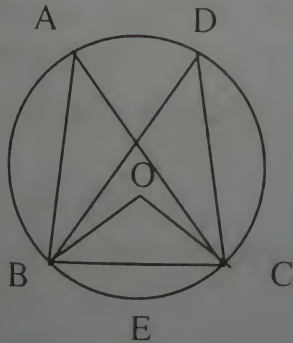
$\therefore \Delta POA \cong \Delta POB$

$\therefore PA = PB$ (প্রমাণিত)

প্রমাণ করুন যে, বৃত্তের একই চাপের উপর দন্ডায়মান বৃত্তস্থ কোণগুলি পরস্পর সমান।

সাধারণ নির্বচন : প্রমাণ করতে হবে যে, বৃত্তের একই চাপের উপর দন্ডায়মান বৃত্তস্থ কোণগুলি পরস্পর সমান।

বিশেষ নির্বচন : মনে করি, ABCD একটি বৃত্ত। 'O' এদের কেন্দ্র। $\angle BAC$ এবং $\angle BDC$ এর BEC চাপের উপর দন্ডায়মান দুটি বৃত্তস্থ কোণ। প্রমাণ করতে হবে যে, $\angle BAC = \angle BDC$ ।



অংকন : O, B এবং O, C যোগ করি।

প্রমাণ : যেহেতু কেন্দ্রস্থ $\angle BOC$ এবং বৃত্তস্থ $\angle BAC$ একই চাপ BEC এর উপর

সেহেতু $\angle BOC = \angle BAC$ (i)

অনুরূপভাবে, $\angle BOC = 2\angle BDC$ (ii)

সুতরাং $2\angle BAC = 2\angle BDC$ [(i) নং ও (ii) নং তুলনা করে পাই]

অর্থাৎ $\angle BAC = \angle BDC$ (প্রমাণিত)

■ দেখান যে, বৃত্তের দুটি জ্যা-এর মধ্যে বৃহত্তর জ্যা-টি ক্ষুদ্রতর জ্যা অপেক্ষা কেন্দ্রের নিকটতর।
সাধারণ নির্বচন : প্রমাণ করতে হবে যে, বৃত্তের দুটি জ্যা-এর মধ্যে বৃহত্তর জ্যা-টি কেন্দ্রের নিকটতর।

বিশেষ নির্বচন : মনেকরি, $ABCD$ বৃত্তের O কেন্দ্র।

AB ও CD দুটি জ্যা-এর $AB > CD$ । OE এবং OF কেন্দ্র O থেকে যথাক্রমে AB ও CD -এর উপর লম্ব।

প্রমাণ করতে হবে যে, $OE < OF$ ।

অঙ্কন : O, A এবং O, C যোগ করি।

প্রমাণ : OE, AB -এর উপর লম্ব হওয়ায় $AE = \frac{1}{2}$

AB এবং OF, CD -এর উপর

লম্ব হওয়ায় $CF = \frac{1}{2} CD$

এখন, AOE সমকোণী ত্রিভুজে AO অতিভুজ

$$\therefore OA^2 = OE^2 + AE^2$$

আবার, COF সমকোণী ত্রিভুজে CO অতিভুজ

$$\therefore OC^2 = OF^2 + CF^2$$

AO এবং OC একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ হওয়ায় $OA = OC$

$$\text{সুতরাং, } OE^2 + AE^2 = OF^2 + CF^2 \text{ (i)}$$

কিন্তু, $AB > CD$ হওয়ায়, $\frac{1}{2} AB > \frac{1}{2} CD$

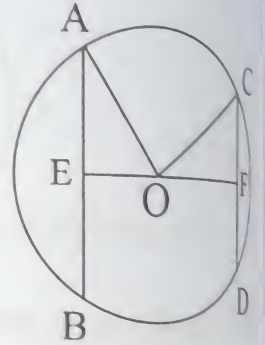
$$\text{বা, } AE > CF \therefore AE^2 > CF^2$$

সমীকরণ (i) নং থেকে দেখা যায়,

AE^2 যদি CF^2 থেকে বৃহত্তর হয় তবে OE^2, OF^2 থেকে ক্ষুদ্রতর হবে।

$$\text{সুতরাং, } OE^2 < OF^2$$

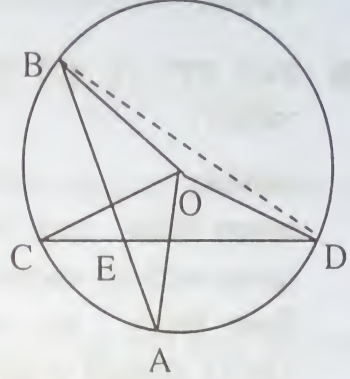
$$\therefore OE < OF \text{ (প্রমাণিত)।}$$



০ কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তের AB ও CD জ্যা দুটি বৃত্তের অভ্যন্তরে অবস্থিত কোন বিন্দুতে সমকোণে মিলিত হয়েছে। প্রমাণ করুন যে, $\angle AOD + \angle BOC = 2$ সমকোণ।

সাধারণ নির্বচন : O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তের AB ও CD জ্যা দুটি বৃত্তের অভ্যন্তরে অবস্থিত কোন বিন্দুতে সমকোণে মিলিত হয়েছে। প্রমাণ করুন যে, $\angle AOD + \angle BOC =$ দুই সমকোণ।

বিশেষ নির্বচন : মনে করি, ACBD বৃত্তের O কেন্দ্র এবং AB ও CD জ্যা দুটি বৃত্তের অভ্যন্তরে E বিন্দুতে সমকোণে মিলিত হয়েছে। O ও A, O ও C, O ও B এবং O ও D যোগ করা হল।



প্রমাণ করতে হবে যে, $\angle AOD + \angle BOC =$ দুই সমকোণ।

অঙ্কন : B, D যোগ করি।

প্রমাণ : AD চাপের উপর অবস্থিত কেন্দ্রস্থ $\angle AOD$ এবং বৃত্তস্থ $\angle ABD$

সুতরাং, $\angle AOD = 2 \angle ABD$.

আবার, BC চাপের উপর অবস্থিত কেন্দ্রস্থ $\angle BOC$ এবং বৃত্তস্থ $\angle BDC$

$\therefore \angle BOC = 2 \angle BDC$

$\therefore \angle AOD + \angle BOC = 2 \angle ABD + 2 \angle BDC$
 $= 2 (\angle ABD + \angle BDC)$

কিন্তু BED সমকোণী ত্রিভুজে,

$\angle BED =$ এক সমকোণ হওয়ায়,

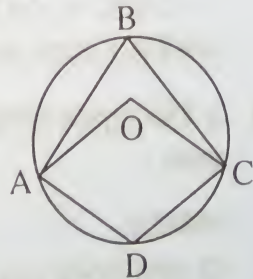
$\angle EBD + \angle EDB =$ এক সমকোণ

বা, $\angle ABD + \angle BDC =$ এক সমকোণ

অতএব, $\angle AOD + \angle BOC = 2 \times$ এক সমকোণ

$\therefore \angle AOD + \angle BOC =$ দুই সমকোণ (প্রমাণিত)।

■ প্রমাণ করুন যে, বৃত্তে অন্তর্লিখিত চতুর্ভুজের যেকোনো দুইটি বিপরীত কোণের সমষ্টি দুই সমকোণ।



সাধারণ নির্বচন : প্রমাণ করতে হবে যে, অন্তর্লিখিত চতুর্ভুজের যেকোনো দুইটি বিপরীত কোণের সমষ্টি দুই সমকোণ।

বিশেষ নির্বচন : মনে করি, O কেন্দ্রবিশিষ্ট একটি বৃত্তে ABCD চতুর্ভুজটি অন্তর্লিখিত হয়েছে।

প্রমাণ করতে হবে যে, $\angle ABC + \angle ADC =$ দুই সমকোণ

অঙ্কন : O, A এবং O, C যোগ করি।

প্রমাণ : একই চাপ ADC এর দর্শ্যমান কেন্দ্রস্থ $\angle AOC = 2$ (বৃত্তস্থ $\angle ABC$)

অর্থাৎ, $\angle AOC = 2 \angle ABC$

আবার, একই চাপ ABC এর উপর দর্শ্যমান কেন্দ্রস্থ প্রবৃদ্ধকোণ $\angle AOC = 2$ (বৃত্তস্থ $\angle ADC$)

অর্থাৎ, প্রবৃদ্ধকোণ $\angle AOC = 2 \angle ADC$

$$\therefore \angle AOC + \text{প্রবৃদ্ধকোণ } \angle AOC = 2(\angle ABC + \angle ADC)$$

কিন্তু, $\angle AOC + \text{প্রবৃদ্ধ কোণ } \angle AOC = \text{চার সমকোণ}$

$$\therefore 2(\angle ABC + \angle ADC) = \text{চার সমকোণ}$$

$$\therefore \angle ABC + \angle ADC = \text{দুই সমকোণ}$$

একইভাবে প্রমাণ করা যায় যে, $\angle BAD + \angle BCD = \text{দুই সমকোণ (প্রমাণিত)}$

■ প্রমাণ করুন যে, বৃত্তে অন্তর্লিখিত চতুর্ভুজের যেকোনো দুইটি বিপরীত কোণের সমষ্টি দুই সমকোণ।

সমাধান:

সাধারণ নির্বচন : প্রমাণ করতে হবে যে, বৃত্তে অন্তর্লিখিত চতুর্ভুজের যেকোনো দুইটি কোণের সমষ্টি দুই সমকোণ।

বিশেষ নির্বচন : মনে করি, O কেন্দ্রবিশিষ্ট একটি বৃত্তে ABCD চতুর্ভুজটি অন্তর্লিখিত হয়েছে।

প্রমাণ করতে হবে যে, $\angle ABC + \angle ADC = \text{দুই সমকোণ}$

এবং $\angle BAD + \angle BCD = \text{দুই সমকোণ}।$

অঙ্কন : O, A এবং O, C যোগ করি।

প্রমাণ : একই চাপ ADC এর উপর দন্ডায়মান কেন্দ্রস্থ কোণ $\angle AOC = 2$ (বৃত্তস্থ কোণ) $\angle ABC$ [কেন্দ্রস্থ কোণ বৃত্তস্থ কোণের দ্বিগুণ]

$$\text{অর্থাৎ, } \angle AOC = 2\angle ABC$$

আবার, একই চাপ ABC এর উপর দন্ডায়মান কেন্দ্রস্থ প্রবৃদ্ধকোণ $\angle AOC = 2$ (বৃত্তস্থ কোণ) $\angle ADC$

$$\text{অর্থাৎ, প্রবৃদ্ধকোণ } \angle AOC = 2\angle ADC$$

$$\therefore \angle AOC + \text{প্রবৃদ্ধকোণ } \angle AOC = 2\angle ABC + 2\angle ADC$$

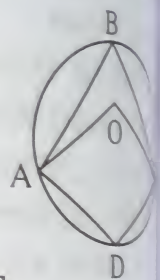
$$\therefore \angle AOC + \text{প্রবৃদ্ধকোণ } \angle AOC = 2(\angle ABC + \angle ADC)$$

কিন্তু, $\angle AOC + \text{প্রবৃদ্ধ কোণ } \angle AOC = \text{চার সমকোণ বা } 360^\circ$

$$\therefore 2(\angle ABC + \angle ADC) = \text{চার সমকোণ বা } \frac{360^\circ}{2} = 180^\circ \text{ দুই সমকোণ}$$

$$\therefore \angle ABC + \angle ADC = \text{দুই সমকোণ (প্রমাণিত)}$$

[একইভাবে প্রমাণ করা যায় যে, $\angle BAD + \angle BCD = \text{দুই সমকোণ}$]



■ ৫ ইঞ্চি ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট বৃত্তে একটি সমবাহু ত্রিভুজ অন্তর্লিখিত আছে। ত্রিভুজটির কেন্দ্র নির্ণয় করুন।

সমাধান:

O কেন্দ্র বিশিষ্ট বৃত্তে

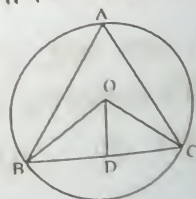
একটি সমবাহু ত্রিভুজ ABC অন্তর্লিখিত আছে।

O, B ও O, C যুক্ত করি।

BC এর উপর $\angle BOC$ এর সমদ্বিখন্ডক OD আঁকি যা BC কে D বিন্দুতে ছেদ করে। এখন, $OB = OC$ (একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ), ফলে, OBC সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ।

অতএব, $OD \perp BC$ এবং $BD = DC$ অর্থাৎ, $BC = 2BD$

$$\text{আবার, } \angle BOC = 2\angle BAC = 2 \times 60^\circ = 120^\circ$$



ফলে, $\angle BOD = \frac{1}{2} \times 120^\circ = 60^\circ \therefore \angle OBD = 180^\circ - (60^\circ + 90^\circ) = 30^\circ$

আমরা পাই, $\triangle OBD$ তে, $\cos 30^\circ = \frac{BD}{OB} \therefore \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{BD}{5} \therefore BD = \frac{\sqrt{3} \times 5}{2}$

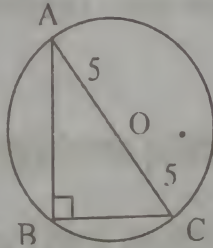
$\therefore BC = 2BD = 2 \times \frac{\sqrt{3} \times 5}{2} = \sqrt{3} \times 5$ $\triangle ABC$ এর এক বাহু $= \sqrt{3} \times 5$

\therefore ক্ষেত্রফল $= \frac{\sqrt{3}}{4} (\sqrt{3} \times 5)^2$ বর্গ ইঞ্চি $= \frac{75\sqrt{3}}{4}$ বর্গ ইঞ্চি $= 32.475$ বর্গ ইঞ্চি।

- 5 ইঞ্চি ব্যাসার্ধবিশিষ্ট বৃত্তে একটি সমকোণী ত্রিভুজ অন্তর্লিখিত আছে যার একটি কোণ 30° ।
উহার বাহুগুলোর দৈর্ঘ্য নির্ণয় করুন।

সমাধান:

যে কোন সরলরেখা AC এর মধ্যবিন্দু O নিই। O থেকে OA তথা OC সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে একটি বৃত্ত আঁকি। এখন A বিন্দুতে $\angle BAC = 30^\circ$ নিই। B, C যোগ করি।
এখন, সমকোণী ত্রিভুজটি বৃত্তে অন্তর্লিখিত হয় বলে, B বিন্দু বৃত্তের পরিধির উপর পড়বে। যে কারণে $\angle ABC =$ এক সমকোণ।



আবার, $\angle BAC = 30^\circ$, $\angle ABC = 90^\circ$ বলে $\angle BCA = 180^\circ - (30^\circ + 90^\circ) = 180 - 120^\circ = 60^\circ$

এখন, শর্তানুসারে, OA বা, OC = 5 ইঞ্চি

ফলে, $AC = OA + OC = (5 + 5)$ ইঞ্চি বা 10 ইঞ্চি

আমরা পাই, $\cos 60^\circ = \frac{BC}{AC}$ বা, $\frac{1}{2} = \frac{BC}{AC}$ বা, $2BC = AC$

$\therefore BC = \frac{AC}{2} = \frac{10}{2}$ ইঞ্চি $= 5$ ইঞ্চি

আবার, $\sin 60^\circ = \frac{AB}{AC}$ বা, $\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{AB}{AC}$

বা, $2 \times AB = \sqrt{3} \times AC$

$\therefore AB = \frac{\sqrt{3} \times AC}{2} = \frac{\sqrt{3} \times 10}{2}$ ইঞ্চি $= 5\sqrt{3}$ ইঞ্চি

\therefore নির্ণেয় বাহুদ্বয়ের দৈর্ঘ্য AC = 10 ইঞ্চি, BC = 5 ইঞ্চি, AB = $5\sqrt{3}$ ইঞ্চি Ans.

- O কেন্দ্র বিশিষ্ট বৃত্তের দুটি জ্যা AB, CD বৃত্তের অভ্যন্তরে পরস্পরকে সমকোণে প্রমাণ করুন $\angle AOD$ এবং $\angle BOC$ সম্পূরক কোণ।

সমাধান:

মনেকরি,

O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তের AB ও CD জ্যা দু'টি P বিন্দুতে পরস্পর লম্বভাবে ছেদ করে।

করতে হবে যে, $\angle AOD$ এবং $\angle BOC =$ সম্পূরক কোণ।

অঙ্কন : DO কে বর্ধিত করায় বৃত্তচাপকে E বিন্দুতে ছেদ করে। E, C যোগ করি।

প্রমাণ : $\angle DCE = 90^\circ$ (অর্ধবৃত্তস্থ কোণ)

$$\therefore AB \parallel CE$$

$$\therefore \text{চাপ } AC = \text{চাপ } BE.$$

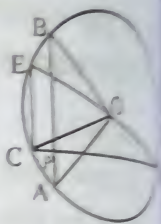
$$\therefore \angle AOC = \angle BOE \dots\dots\dots (i)$$

$$\text{এখন } \angle AOD + \angle BOC = \angle AOD + \angle COE + \angle BOE$$

$$= \angle AOD + \angle AOC + \angle COE = \angle DOE = 2 \text{ সমকোণ}$$

যেহেতু দুটি কোণের সমষ্টি দুই সমকোণ হলে একটিকে অপরটির সম্পূরক কোণ বলা যায়।

$\angle AOD$ এবং $\angle BOC =$ সম্পূরক কোণ। (প্রমাণিত)



ক্ষেত্রফল সম্পর্কিত সমস্যা

- একটি আয়তাকার ক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য বিস্তারের ৩ গুণ। একে $1\frac{1}{2}$ ফুট বর্গ পাথর দিয়ে বঁধতে ২০২৮টি পাথর প্রয়োজন। আয়তক্ষেত্রটির দৈর্ঘ্য মেট্রিক এককে নির্ণয় করুন।

সমাধান:

(দেওয়া আছে ১ ফুট = ৩০.৪৮ সে. মি.)

$$\text{প্রতিটি পাথরের ক্ষেত্রফল} = \left(\frac{3}{2}\right)^2 \text{ বর্গফুট} = \frac{9}{8} \text{ বর্গফুট}$$

$$\text{আয়তক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফল} = \frac{9}{8} \times ২০২৮ \text{ বর্গফুট} = ৯ \times ৫০৭ = ৪৫৬৩ \text{ বর্গফুট}$$

মনে করি, বিস্তার = 'ক' ফুট

অতএব, দৈর্ঘ্য = ৩ক ফুট

$$\text{ক্ষেত্রফল} = (৩ক \times ক) \text{ বর্গফুট} = ৩ক^2 \text{ বর্গফুট}$$

$$\text{শর্তানুসারে, } ৩ক^2 = ৪৫৬৩ \text{ বর্গফুট}$$

$$\text{বা, } ক^2 = \frac{৪৫৬৩}{৩} \text{ বর্গফুট}$$

$$\text{বা, } ক^2 = ১৫২১ \text{ বর্গফুট}$$

$$\text{অতএব } ক = \sqrt{১৫২১} = ৩৯ \text{ ফুট}$$

$$\text{বিস্তার } ৩৯ \text{ ফুট, দৈর্ঘ্য } ৩৯ \times ৩ = ১১৭ \text{ ফুট}$$

$$১ \text{ ফুট} = ৩০.৪৮ \text{ সে. মি.}$$

$$\therefore ১১৭ \text{ ফুট} = ৩০.৪৮ \times ১১৭ \text{ সে. মি.}$$

BCS , Bank

PDF বইয়ের অনলাইন লাইব্রেরী

MyMahbub.Com